Remarque sur les fonctions holomorphes.

Par MARCEL RIESZ à Lund (Suède).

1. Dans un travail commun, paru en 1921, MM. L. FEJÉR et F. RIESZ[1]) ont publié quelques résultats qui sont devenus très connus. Ils ont démontré entre autres choses que lors de la représentation conforme d'un cercle sur un domaine limité par une courbe de Jordan rectifiable de longueur l l'image de chaque diamètre a une longueur $\leqq \frac{1}{2}\, l$. La constante $\frac{1}{2}$ ne peut pas être abaissée.

M. GABRIEL[2]) a considéré un problème plus général et montré que, la fonction $f(x)$ étant holomorphe à l'intérieur et sur le contour C d'un cercle et Γ étant une courbe convexe fermée intérieure à C, on a l'inégalité

$$\int_\Gamma |f(x)|\,|dx| \leqq 2 \int_C |f(z)|\,|dz|. \tag{1}$$

La constante 2 ne peut pas être abaissée non plus.

On voit que le résultat de M. GABRIEL ne comprend pas celui de MM. FEJÉR et RIESZ. En effet un diamètre, parcouru deux fois, peut être considéré comme une courbe convexe fermée. Pour une telle courbe l'inégalité (1) est, d'après ce qu'on a dit au début, valable avec la constante 1. M. CARLSON a de son côté donné une inégalité d'une généralité remarquable qui comprend tous les résultats antérieurs. Voici le théorème de M. CARLSON[3]):

Soit $f(x)$ holomorphe à l'intérieur et sur le contour C d'un cercle et soit L une courbe rectifiable intérieure à C. On a l'inégalité

$$\int_L |f(x)|\,|dx| \leqq \frac{1}{\pi} \int |f(z)|\, V(z)\, |dz|, \tag{2}$$

[1]) L. FEJÉR und F. RIESZ, Über einige funktionaltheoretische Ungleichungen, *Math. Zeitschrift,* 11 (1921), p. 305—314.

[2]) R. M. GABRIEL, Some results concerning the integrals of moduli of regular functions along curves of certain types, *Proceedings London Math. Society,* 28 (1928), p. 121—127.

[3]) F. CARLSON, Quelques inégalités concernant les fonctions analytiques, *Arkiv för mat., astronomi och fysik,* 29 B, n° 11 (1943), p. 1—6.

où $V(z)$ est la borne supérieure de la somme des angles sous lesquels sont vus du point z les éléments d'arcs de L.[4])

En particulier, si l'inégalité $V(z) \leqq W$ est remplie pour tout point z de C, le second membre de (2) sera $\leqq \frac{W}{\pi} \int |f(z)| |dz|$. Si L est un diamètre de C, on a $W = \frac{\pi}{2}$, ce qui amène à l'inégalité de MM. Fejér et Riesz. Le résultat de M. Gabriel s'obtient, si l'on observe que, pour une courbe convexe fermée, on a toujours $W \leqq 2w \leqq 2\pi$, où w est l'angle le plus grand sous lequel on voit la courbe d'un point de C.

M. Carlson déduit son théorème de l'inégalité suivante, dans laquelle l'intégrale est étendue au segment de droite AB joignant les points A et B intérieurs au cercle C,

$$\int_A^B |f(x)| |dx| \leqq \frac{1}{\pi} \int_C |f(z)| V(z) |dz|, \tag{3}$$

où $V(z)$ est l'angle sous lequel est vu le segment AB du point z. Cette inégalité, appliquée à des segments infinitésimaux, fournit le théorème plus haut.

Comme une contribution modeste au volume jubilaire dédié à MM. Fejér et Riesz, nous déduirons les relations (équivalentes) (9) et (10, qui peuvent présenter un certain intérêt. De ces relations, on obtient immédiatement l'inégalité infinitésimale de M. Carlson.

2. Après avoir introduit un système de coordonnés rectangulaires, désignons les points du plan par les nombres complexes correspondants et admettons que le centre du cercle C se trouve à l'origine. Soit $u(x)$ une fonction des coordonnés x' et x'' du point $x = x' + ix''$ qui est harmonique à l'intérieur de C et sur C. Désignons encore par z les points de C et posons

$$\arg z = \theta(z) = \theta \quad \text{et} \quad \arg (z - x) = \psi(z, x) = \psi. \tag{4}$$

Le potentiel de double couche

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_C u(z)\, d\psi \tag{5}$$

(où $d\psi$ est une abréviation pour $d_z \psi(z, x) = \frac{d}{d\theta} \psi(z, x)\, d\theta$ ou $= \frac{\partial}{\partial z} \psi(z, x)\, dz$) est évidemment harmonique à l'intérieur de C, puisqu'il en est ainsi de $\psi(z, x)$. Quand x tend vers un point z_0 de C d'une façon arbitraire, $g(x)$ tend manifestement vers

$$u(z_0) + \frac{1}{\pi} \int_C u(z)\, d_z \psi(z, z_0). \tag{6}$$

---

[4]) M. Gabriel et M. Carlson montrent, au moyen d'un artifice utilisé dans un but analogue par MM. Fejér et Riesz (*loc cit.*, p. 307), que leurs résultats subsistent, si l'on remplace $|f|$ par $|f|^k$, $k > 0$.

Pour le voir, décomposons le contour C en deux arcs C' et C'', l'arc C' entourant le point z_0 et étant assez petit, pour que l'oscillation de $u(z)$ sur cet arc soit très petite. On décompose en même temps l'intégrale figurant dans (5) en deux parties, l'une étendue à C' et l'autre à C''. L'angle sous lequel est vu l'arc C' d'un point x, assez rapproché du point z_0, étant sensiblement égal à π, la partie de l'intégrale étendue à C' sera sensiblement égale à $u(z_0)$, tandis que la partie étendue à C'' sera sensiblement égale à l'intégrale figurant dans (6). Dès lors, l'énoncé ci-dessus se trouve vérifié.

Or l'angle périphérique $d_z\psi(z, z_0)$ est indépendant de z_0 et égal à $\frac{1}{2}d\theta(z)$; le dernier terme de (6) aura donc la valeur

$$\frac{1}{2\pi}\int_C u(z)\,d\theta(z) = u(0).$$

Il s'ensuit que la fonction $g(x)-u(0)$ tend vers $u(z_0)$, quand x tend vers z_0 d'une façon arbitraire. Une fonction harmonique étant déterminée par ses valeurs frontières, on conclut que $u(x)=g(x)-u(0)$, ou

$$(7)\qquad u(x)=\frac{1}{2}\int_C u(z)\,d\psi-u(0)=\frac{1}{\pi}\int_C u(z)\left(d\psi-\frac{d\theta}{2}\right).$$[5]

3. Appliquons maintenant cette formule à une fonction $F(x)$, holomorphe à l'intérieur de C et sur C. Nous aurons d'abord

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_C F(z)\,d\psi-F(0).$$

Désignons la dérivée $F'(x)$ de $F(x)$ par $f(x)$ et formons les dérivées par rapport à x *dans une direction déterminée*. Il vient

$$(8)\qquad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_C F(z)\,d_z\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right).$$

Le premier membre étant indépendant de la direction de différentiation, il en est de même du second membre. Bien entendu il n'en est ainsi que pour l'intégrale elle-même, tandis que les éléments infinitésimaux de l'intégrale dépendent de la direction en question. Une intégration par parties donne

$$(9)\qquad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_C F(z)\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial x}dz=-\frac{1}{\pi}\int_C f(z)\frac{\partial\psi}{\partial x}dz,$$

formule valable pour toute fonction $f(x)$ holomorphe à l'intérieur de C et sur C. Eu égard à (4), on a

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x}dx=-\frac{\partial}{\partial x}\arg(z-x)\,dx=\frac{\partial}{\partial x}\arg(x-z)\,dx=d_x\arg(x-z).$$

---

[5]) *Cf.* É. Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, vol. III, 2e édition (Paris, 1915), p. 185, formule (16).

Dès lors, on tire de (9)

$$f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_C f(z)\,d_x \arg(x-z)\,dz, \tag{10}$$

d'où il vient

$$|f(x)|\,dx \leqq \frac{1}{\pi}\int_C |f(z)|\,|d_x \arg(x-z)|\,|dz| \tag{11}$$

Or $|d_x \arg(x-z)|$ étant précisément l'angle sous lequel l'élément dx est vu du point z, la dernière inégalité est identique à la forme infinitésimale de l'inégalité (3) de M. CARLSON.

(Reçu le 8 décembre 1949)